損失変調レーザー系における非平衡相転移とカオス(カオスとその周辺,研究会報告)

金野, 秀敏; 本池, 巧; Willeboordse, F.; 有光, 敏彦

損失変調レーザー系における非平衡相転移とカオス

筑波大　物質工学[A]、物理[B]
金野　秀敏[A]、本池　巧[B]、F.Willeboordse[B]、有光　敏彦[B]

近年、時空カオスの複雑な振舞いが盛んに議論されるようになってきている。研究対象となっている系の自由度も少数自由度からより大きな自由度へと移行するようになってきている。しかし、カオスの熱統計力学的解析や複雑な遍歴現象の解析は今だ十分に研究されて居ない。さらに、実験との対応では様々な未解決の問題が残されている。例えば、(i) 加振下の水の表面波における散逸項の起源の問題、(ii) 弾性体の強制振動系でのカオスの発生点の理論と実験の大きなくい違いの問題、(iii) レーザー系のカオス等に代表されるような外来雑音の遍歴的運動に及ぼす影響の問題　等々が存在する。特異点スペクトル等のカオスの統計力学的記述は進んできたが、カオスの発生のメカニズムに関しては依然として不明の点が多い。

我々は少数自由度系ではあるが、多重定常状態が存在し、複雑な振動状態が生ずる損失レーザーモデルを取りあげ、まず、数値実験を行ないカオスの数理解析に資する情報抽出を試みた。

基礎方程式（モデル）は良く知られた Maxwell-Bloch方程式で分極 p を断熱消去し、正弦波形の変調($K=K_0(1+m\cos\Omega t)$)を加えたものである。定常値でスケールする事により、次式を得る。

$$\frac{d}{dt}u = -u[\delta\cos 2\omega t - z] \tag{1a}$$

$$\frac{d}{dt}z = -\varepsilon_1 z - u - \varepsilon_2 uz + 1 \tag{1b}$$

さらに、　$x = \ell n(u)$　(2)

と変数変換すれば、次の様な非線形振動子の形に書き換える事が出来る。

$$\ddot{x} + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 e^x)\dot{x} + (e^x - 1) = -(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 e^x)\delta\cos 2\omega t + 2\omega\delta\sin 2\omega t \tag{3}$$

すなわち、戸田ポテンシャルの中の相乗的外力と相加的外力影響下での粒子の運動と等価になる。(3) 式で散逸項と外力項を摂動項とみなした場合、この系にはあらわにセパラトリックスが存在しないためメルニコフの理論が使えず、カオスの発生点の理論的予測も出来ない。

(3) 式を満足する周期解を$x^*(t)$ とする。$x=x^*(t)+\xi$ と置き、周期解のまわりの揺ぎξに関する方程式は次の様になる。

$$\ddot{\xi}+(\varepsilon_1+\varepsilon_2 e^{x^*(t)})\dot{\xi}+(1+\varepsilon_2\dot{x}^*(t)+\varepsilon_2\delta\cos 2\omega t)e^{x^*(t)}\xi=0 \qquad (4)$$

静止解 $x^*(t)$=cost は存在しないので、単純なマシュー方程式の安定・不安定問題には帰着されない。1周期解 $x_1{}^*(t)$ 基にして(4) の不安定境界を研究すれば、1周期解と2周期解の相境界が評価される。同様の手続きを2周期解 $x_2{}^*(t)$ を基にして実行すれば2周期解と4周期解の相境界が評価される。しかし、これで評価可能なのは共鳴周波数近傍（$\omega\approx 1$）に限られ、しかも、周期解 $x_n{}^*(t)$ の近似程度が相境界値の評価に鋭敏に反映する事に注意。

図1にはε_1=0.09, ε_2=0.003 と設定し、数値計算により2次元位相空間（ω, δ）における振動状態の相図を示す。共鳴周波数近傍（$\omega\approx 1$）ではδを大きくしていった時振動周期の倍周期化（Π_{2n}）を経てカオスへ至る相変化がみられる。一方、低周波数側（$\omega<0.7$）では非常に複雑な相変化の後にカオスへ至る結果が得られた。例えばω=0.45 では$\Pi_1\to\Pi_2\to\Pi_3\to\Pi_6\to\Pi_3\to\Pi_4\to\Pi_8\to\cdots\to$chaos が見い出されている。この低周波数域では多重定常状態が存在し、異なる解の分岐の系列が重なり合っている。ここでは、アトラクタの衝突・融合が激しく起こっていると考えられる。パラメータε_1のみをε_1=0.3 に変えてみると、この低周波数側の複雑な相変化は消失し、倍周期化による相変化しか見られなくなる。

我々の数値計算と対応すると考えられる実験はArecchi　らのグループで行なわれている。倍周期化のルートの存在は明らかにされて居るが、複雑な相変化をする場合の実験は十分行なわれて居ないが、本数値計算で見い出された様なバラエティーに富む周波数による振動状態の変化が得られて居る。

また、Arecchi らのグループのレーザー変調実験では周期的アトラクタ間の飛び移り（カオスの遍歴的運動）が観測されて居る。我々の数値計算実験でも異なる周期のアトラクタ間の飛び移りを示唆する時間変化が散見される。実際の実験でも数値実験でも外来雑音や数値誤差は不可避である。カオスの数値解析・理論的方法の探究（周期解の方からのアプローチ）、アトラクタ間の飛び移りの仕掛けやノイズの影響についての詳細な検討等は今後の課題である。

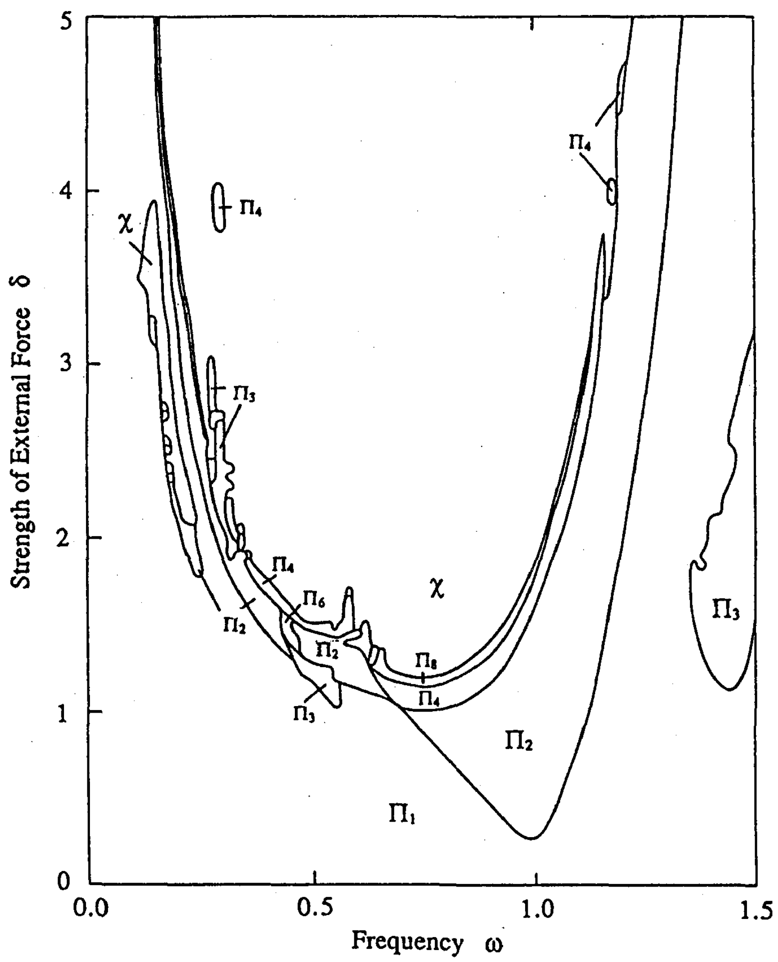

図1　　2次元位相空間（ω，δ）における振動状態の相図
Π_j は j －周期振動領域，χ はカオス領域をあらわす。
但し、χ 内部の細かな構造は省略してある。